

УДК 621.317.757

DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2020.4.29>

КОМПОЗИЦИОННЫЙ ЭЙЛЕРОВ СИГНАЛ С ХОРОШИМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ И НИЗКИМ ТРЕБУЕМЫМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ РЕСУРСОМ

Я. А. Фурман, А. О. Ямщиков

Поволжский государственный технологический университет,
Российская Федерация, 424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3
E-mail: krtmbs@volgatech.net

Получен новый класс сигналов, основанных на формуле Эйлера, связывающей между собой тригонометрические и показательные функции. Сигналы Эйлера образуются композицией элементарных векторных сигналов, обладающих свойством взаимной ортогональности. На их основе достаточно просто формируется сжатый сигнал в виде символа Кронекера (единичного импульса) с нулевыми боковыми лепестками. Новый сигнал эффективен для решения задач, связанных с повышением разрешающей способности радиолокационной станции по дальности.

Ключевые слова: аддитивно-композиционный сигнал; композиционный векторный сигнал; сжатие сигналов; формула Эйлера.

Введение. Одной из проблем современной радиолокации является обеспечение высокой разрешающей способности станции по дальности [1, 2]. Существующий подход к её решению состоит в выборе зондирующих сигналов, обладающих дельтовидной автокорреляционной функцией (АКФ). Обычно последний узел радиолокационного приёмника обеспечивает вычисление АКФ выходного сигнала. В результате эхосигнал от самых близко расположенных друг к другу целей на экране дисплея будут представлять не взаимно пересекающимися друг с другом сигналами, а разделёнными по времени единичными импульсами. Такой вариант решения проблемы повышения разрешающей способности РЛС по дальности называют сжатием эхосигнала.

Отметим два подхода к реализации АКФ сигнала для его последующего сжа-

тия. Первый из них предполагает использование АКФ в виде δ -функции. Исходя из того, что δ -функция физически нереализуема, на практике для сжатия выбирают сигналы, АКФ которых близка по форме к δ -функции. Естественно, что в результате эффективность сжатия снижается и кроме главного лепестка сжатого сигнала появляется ряд боковых лепестков, маскирующих эхосигналы от удалённых целей с низкой эффективной поверхностью рассеяния (ЭПР).

Второй подход связан с применением зондирующих сигналов с дискретной огибающей, позволяющей представить её в форме единичного импульса (символа Кронекера) [3]. Сжатый сигнал состоит из одного тонкого лепестка, шириной в 1 пиксель (элемент разрешения), энергия которого равна энергии исходного сигнала

© Фурман Я. А., Ямщиков А. О., 2020.

Для цитирования: Фурман Я. А., Ямщиков А. О. Композиционный эйлеров сигнал с хорошими корреляционными свойствами и низким требуемым вычислительным ресурсом // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2020. № 4 (48). С. 29-39. DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2020.4.29>

(до сжатия), а боковые лепестки отсутствуют. Сигналы с подобными свойствами малоизвестны. Одним из них является рассмотренный в работах [4, 5] векторный сигнал $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}(n)\}_{n=0}^{k-1}$ в виде композиции элементарных эйлеровых сигналов (ЭЭС)

$$\mathbf{e}(n) = \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}; \quad (1)$$

$$m = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 0, 1, \dots, k-1.$$

Цель данной работы заключается в расширении класса композиционных сигналов на основе ЭЭС, допускающих эффективное сжатие. Под эффективностью сжатия будем понимать такие его качества, как уровень сложности процедуры сжатия, возможность получения сжатых сигналов произвольной размерности, объём требуемого вычислительного ресурса и уровень шума до и после сжатия.

Анализ элементарных эйлеровых сигналов. Тригонометрические и показательные функции связаны между собой формулой Эйлера¹ $\cos \varphi + i \sin \varphi = \exp\{i\varphi\}$, где φ – величина произвольного угла в радианах (градусах). Пусть $\varphi = \varphi_0 \cdot m \cdot n$, $m=0, 1, \dots, k-1$; $n=0, 1, \dots, k-1$, $\varphi_0=2\pi/k$, где k – произвольное целое реальное число. Тогда на основании формулы Эйлера получим

$$\mathbf{E}_{k,m,n} = \left\{ \mathbf{e}_{k,m,n} \right\}_{n=0}^{k-1} = \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}_{n=0}^{k-1}; \quad (2)$$

$$m = 0, 1, \dots, k-1; \quad n = 0, 1, \dots, k-1.$$

Здесь $\mathbf{E}_{k,m,n}$ – элементарный эйлеров сигнал в показательной форме с параметрами k, m, n : k – размерность ЭЭС, количество составляющих его компонент; n – номер текущей компоненты; m – номер текущего ЭЭС, его порядок. Как видно из значений диапазонов параметров m и n , величина размерности k определяет количество ЭЭС, образующих полное семейство этих сигналов. В качестве примера приведём вид полного семейства ЭЭС размерности $k=4$, $m=0, 1, 2, 3$, $n=0, 1, 2, 3$:

$$\mathbf{E}_{4,m,n} = \left\{ \mathbf{e}_{4,m,n} \right\}_0^3 = \left\{ \exp\left\{i \frac{\pi}{2} mn\right\} \right\}_{m=0}^3 = \left\{ \cos 90^0 mn + i \sin 90^0 mn \right\}_{n=0}^3, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_{4,0} = \{1, 1, 1, 1\}; \quad \mathbf{E}_{4,1} = \{1, i, -1, -i\};$$

$$\mathbf{E}_{4,2} = \{1, -1, 1, -1\}; \quad \mathbf{E}_{4,3} = \{1, -i, -1, i\}.$$

Отметим, что приведённые выше ЭЭС $\mathbf{E}_{4,m,n}$ задают семейство фигур в виде контуров (рис. 1).

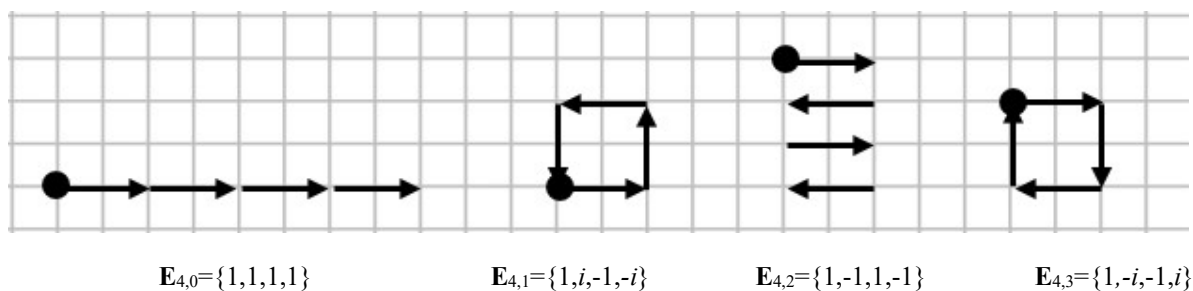


Рис. 1. Геометрические фигуры, образованные ЭЭС размерностью $k=4$
 Fig. 1. Geometric figures formed by an elementary Eulerian signal of dimension $k = 4$

¹Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике / Издание переработано под ред. Г.Гроше и В.Циглером. Перевод с немецкого. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Если с помощью операций конкатенации создать последовательность всех векторов полного семейства ЭЭС, то получим композиционный вектор \mathbf{E}_4 , характеризующий это семейство:

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{E}_{4,0} \oplus \mathbf{E}_{4,1} \oplus \mathbf{E}_{4,2} \oplus \mathbf{E}_{4,3} = \{1, 1, 1, 1, 1, i, -1, -i, 1, -1, 1, -1, -i, -1, i\},$$

где \oplus – обозначение операции конкатенации векторов.

Также следует отметить, что ЭЭС

$$\mathbf{E}_{k,m,n} = \left\{ \exp \left\{ i \frac{2\pi}{k} mn \right\} \right\}$$

является достаточно известным сигналам. Например, он входит в выражение для вычисления спектра Фурье $\{\rho(m)\}_0^{k-1}$ векторного сигнала $\mathbf{U} = \{u(n)\}_0^{k-1}$:

$$\rho(m) = \sum_{n=0}^{k-1} u(n) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{k} mn \right\}, \quad (4)$$

$$m = 0, 1, \dots, k-1$$

Приведённое выше выражение представляет собой скалярное произведение векторов \mathbf{U} и $\mathbf{E}_{k,m,n}$. Сведения об ЭЭС можно найти в работе [6]. Однако ряд свойств этих сигналов, необходимых для решения рассматриваемой в данной работе задачи повышения разрешающей способности РЛС по дальности, в известной нам литературе отсутствуют и поэтому они будут исследованы специально в следующем разделе.

Свойства ЭЭС. Последовательность

$$\exp \left\{ i \frac{2\pi}{k} mn \right\} = \exp \{ i \cdot \varphi \cdot m \cdot n \} \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots,$$

является периодической с периодом $T = k = \frac{2\pi}{\varphi}$. Действительно

$$\exp \left\{ i \left(\frac{2\pi}{k} m(n+k) \right) \right\} = \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi}{k} mn + 2\pi \right) \right\} = \exp \{ i \cdot m \cdot n \}.$$

Как видно из этого выражения, отсчёты последовательности, взятые через $n, n=k$ шагов, одинаковы. Отрезок последовательности в интервале $0 \leq m \leq k-1$ бу-

дем называть её главным значением и рассматривать в качестве ЭЭС.

Перечислим достаточно просто доказуемые свойства $\mathbf{E}_{k,m,n} = \{\mathbf{e}(n)\}_0^{k-1}$.

1. Модули компонент $\mathbf{e}(n), n=0, 1, \dots, k-1$, ЭЭС одинаковы по величине и равны 1.

2. Контуры ЭЭС порядков $m=1, 2, \dots, k-1$ являются замкнутыми, так как сумма их компонент равна нулю: $\sum_{n=0}^{k-1} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{k} mn \right\} = 0$, а контур ЭЭС порядка $m=0$ представляет собой последовательность k единиц: $\sum_{n=0}^{k-1} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{k} mn \right\} = \{1, 1, \dots, 1\}$.

3. Углы между соседними векторами $\mathbf{e}(n)$ и $\mathbf{e}(n+1)$ одинаковы и равны $\frac{2\pi}{k} m$.

4. Сумма всех векторов ЭЭС при $m \neq 0$ равна нулю: $\sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{e}(n) = 0$.

5. Векторы ЭЭС сопряжённо симметричны: $\mathbf{e}_m(n) = \mathbf{e}_m^*(k-m)$.

6. Из одинаковости углов между соседними векторами следует, что ЭЭС всех порядков m , за исключением $m=0$, являются правильными ориентированными замкнутыми k -угольниками (рис.1).

7. Ортогональность векторов ЭЭС.

1) ЭЭС $\mathbf{E}_{k,m}$ и $\mathbf{E}_{k,l}$ обладают свойством ортогональности. При задании скалярного произведения сигналов в виде:

$$(\mathbf{E}_{k,m}, \mathbf{E}_{k,l}) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{e}_{k,m} \cdot \mathbf{e}_{k,l}, \quad (5)$$

$$l, m = 0, 1, \dots, k-1$$

эти сигналы можно рассматривать в качестве элементов унитарного пространства [4]. Выражение (5) приводится к виду:

$$(\mathbf{E}_{k,m}, \mathbf{E}_{k,l}) = \sum_{n=0}^{k-1} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{k} (m-l)n \right\} = \begin{cases} k, & \text{при } l=m, \\ 0, & \text{при } l \neq m. \end{cases} \quad (6)$$

На основании (5) следует, что полное семейство ЭЭС размерности k задаёт ортогональный (ортонормированный) базис \mathbf{B}_k , в котором в виде линейной комбинации ЭЭС можно представить произвольный k -мерный вектор.

2) Свойство ортогональности ЭЭС $\mathbf{E}_{k,m}$ и $\mathbf{E}_{k,l}$ сохраняется при повороте каждого из них на произвольные углы $\Delta\varphi_l$ и $\Delta\varphi_r$, а также при растяжении каждого из них в $\mu_l = |\mu_l| \exp\{i\Delta\varphi_l\}$; $\mu_r = |\mu_r| \exp\{i\Delta\varphi_r\}$ раз. Свойство ортогональности ЭЭС сохраняется также при циклическом сдвиге на d компонент начальной точки одного из сигналов и на f компонент начальной точки другого сигнала (d и f – произвольные целые числа).

8. Эргодичность векторов ЭЭС:

$$\mathbf{E}_{k,l}(n) = \mathbf{E}_{k,n}(l). \quad (7)$$

9. Нормы ЭЭС одной размерности, но разных порядков m , совпадают и равны квадратному корню из величины их размерности $\|\mathbf{E}_{k,m}\| = \sqrt{k}$.

10. Сумма образующих полное семейство ЭЭС состоит из k контуров и равна вырожденному вектору $\{k, 0, \dots, 0\}$. Для $k=4$ получим

$$\sum_{m=0}^3 \mathbf{E}_{4,m} = \{4, 0, 0, 0\}. \quad (8)$$

Спектрально-корреляционные свойства ЭЭС

Спектр одиночного сигнала.

Для вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ) $\rho_u = \{\rho(u)\}_{m=0}^{k-1}$

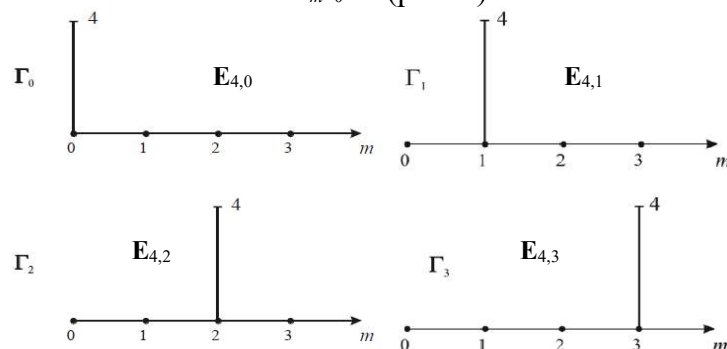


Рис. 2. Спектры ЭЭС размерности $k=4$ порядков $m=0,1,2,3$
 Fig. 2. Spectra of an elementary Eulerian signal of dimension $k = 4$ for orders $m = 0,1,2,3$

векторного сигнала $\mathbf{U} = \{u(n)\}_{n=0}^{k-1}$ используется выражение (4). Каждая компонента $u(n)$ сигнала \mathbf{U} перемножается с соответствующей n -й компонентой ЭЭС:

$$\mathbf{F} = \exp\left\{i \frac{2\pi}{k}\right\}_{n=0}^{k-1}. \quad (9)$$

Частные произведения, полученные в соответствии с (4), суммируются. При подобной трактовке компонент формулы ДПФ выражение (4) представляет собой скалярное произведение векторов \mathbf{U} и \mathbf{F} . При нахождении спектра одиночного ЭЭС векторный сигнал в (4) ассоциируется с

ЭЭС $\mathbf{E}_{k,m,n} = \left\{ \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} \right\}_{n=0}^{k-1}$, порядка

m , а k -мерный вектор \mathbf{F} в (9) – с сигналом Эйлера $\mathbf{F} = \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}$ порядка m . От-

метим, что сигналы $\mathbf{E}_{k,m,n}$ и \mathbf{F} являются ортогональными комплекснозначными векторами, модули компонент которых одинаковы и равны единице. С учётом (9) спектральная компонента ЭЭС будет равна:

$$\rho(m) = \sum_{n=0}^{k-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} n(l-m)\right\} = \begin{cases} k, & \text{при } l=m, \\ 0, & \text{при } l \neq n. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, спектр ЭЭС будет иметь все компоненты равными нулю, за исключением компоненты $\rho(m) = k$.

Например, спектр Фурье ЭЭС $\mathbf{E}_{4,m=1} = \{1, i, -1, -i\}$ равен $\mathbf{P}_{4,m=1} = \{0, 4, 0, 0\}$ (рис. 2).

Спектр суммы ЭЭС

Поскольку определяется сумма спектров s ЭЭС одинаковой размерности k , $s \leq k$, то в силу линейности операции вычисления спектра векторов сумма спектров s сигналов будет равна спектру суммы этих s сигналов:

$$F(\sum_m \mathbf{E}_{k,m}) = \sum_m F(\mathbf{E}_{k,m}). \quad (11)$$

Автокорреляционные функции ЭЭС

АКФ $\mathbf{H} = \{\eta(m)\}_0^{k-1}$, ЭЭС $\mathbf{E}_{k,l}$ равна прямому преобразованию Фурье энергетического спектра $\mathbf{W} = \{|\rho(m)|^2\}_{m=0}^{k-1}$ сигнала $\mathbf{E}_{k,l}$, l – порядок сигнала:

$$\eta(m) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} |\rho(n)|^2 \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad (12)$$

$$m = 0, 1, \dots, k-1.$$

Вычислим, например, циклическую АКФ элементарного эйлерового сигнала $\mathbf{E}_{4,m=1} = \{\mathbf{e}(n)\}_0^3 = \{1, i, -1, -i\}$. Спектр ЭЭС $\mathbf{E}_{4,l}$ равен $\mathbf{P}_{4,1} = \{\rho(m)\}_0^3 = \{0, 4, 0, 0\}$, а энергетический спектр этого сигнала имеет вид $\mathbf{W} = \{w(n)\} = \{0, 16, 0, 0\}$, поэтому искомая АКФ имеет вид:

$$\eta_{4,1}(m) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{k-1} w(n) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k} mn\right\} = \{4, -4i, -4, 4i\}.$$

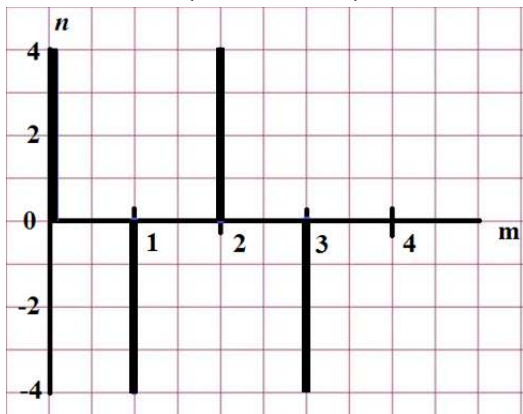


Рис. 3. АКФ элементарного эйлерова сигнала $\mathbf{E}_{4,2} = \{4, -4, 4, -4\}$

Fig. 3. ACF of an elementary Eulerian signal $\mathbf{E}_{4,2} = \{4, -4, 4, -4\}$

Для АКФ сигнала $\mathbf{E}_{4,m=2} = \{1, -1, 1, -i\}$ получим $\eta_{4,2}(m) = \{4, -4, 4, -4\}$ (рис. 3). Как видно из вычисленных значений АКФ, степень схожести между соседними отсчётами ЭЭС минимальна, что является следствием свойства их взаимной ортогональности.

Существующий подход к сжатию композиционных эйлеровых сигналов. Свойства ЭЭС, состоящие в их взаимной ортогональности и форме спектра в виде единичного импульса, дают возможность получить на их основе сигналы, допускающие не только их сжатие, но и полное отсутствие боковых лепестков АКФ в сжатом сигнале. Подобные сигналы получаются в результате композиции полного семейства ЭЭС $\mathbf{E}_{k,m}$. Далее такие сигналы будем называть композиционными эйлеровыми сигналами (КЭС) и обозначать как \mathbf{E}_k :

$$\mathbf{E}_k = \{\mathbf{E}_{k,m=0,n} \oplus \mathbf{E}_{k,m=1,n} \oplus \dots \oplus \mathbf{E}_{k,m=k-1,n}\}, \quad (13)$$

где по-прежнему

$$\mathbf{E}_{k,m,n} = \{\mathbf{e}(n)\}_{n=0}^{k-1} = \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}_{n=0}^{k-1}.$$

Композиционный сигнал \mathbf{E}_k можно представить двумя моделями: векторной и фазовой. На рис. 4, а показана векторная модель КЭС \mathbf{E}_4 , представляющая последовательность векторов из четырёх ЭЭС $\mathbf{E}_{4,0}, \mathbf{E}_{4,1}, \mathbf{E}_{4,2}, \mathbf{E}_{4,3}$, где $\mathbf{E}_{4,0} = \{1, 1, 1, 1\}$, $\mathbf{E}_{4,1} = \{1, i, -1, -i\}$, $\mathbf{E}_{4,2} = \{1, -1, 1, -1\}$, $\mathbf{E}_{4,3} = \{1, -i, -1, i\}$.

На рис. 4, б приведена фазовая модель КЭС \mathbf{E}_4 , компонентами которой служат значения начальных фаз отрезков синусоид длиной в один период, начальные фазы которых задаются по формуле Эйлера: $\gamma(n) = \exp\{i\varphi_0(n)\}$, $n=0, 1, \dots, 15$. Например, $\varphi_0(0) = 0^0$, отсюда $\gamma(0) = \exp\{i0^0\} = 1$, $\gamma(5) = \frac{\pi}{2} = 90^0$, тогда

$$\gamma(5) = \exp\{i90^0\} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i.$$

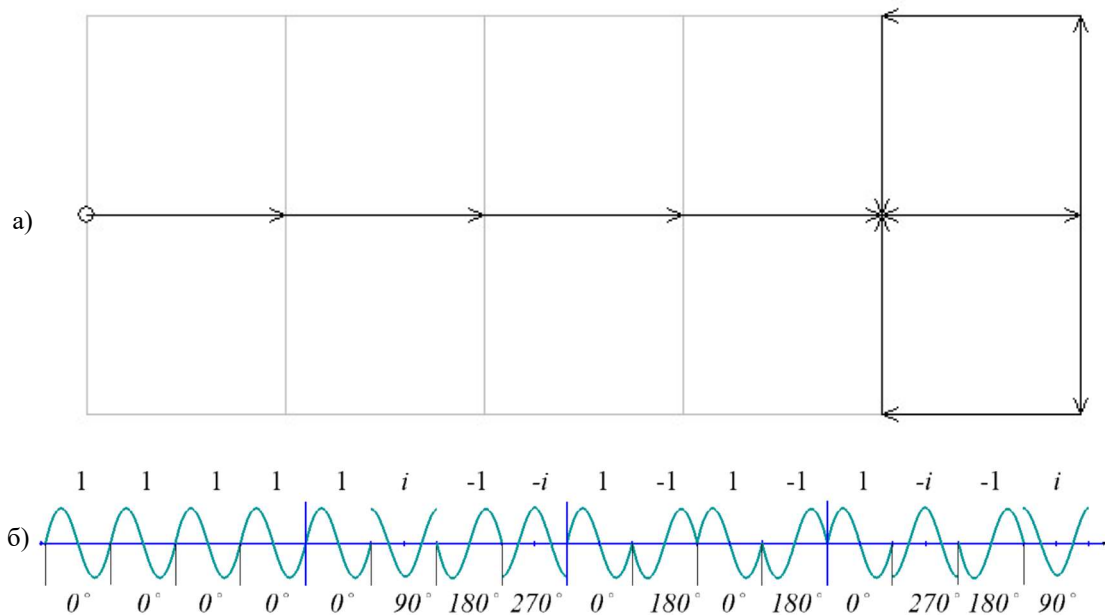


Рис. 4. Композиционный контур E_4 : а) в векторном представлении, б) в виде значений начальных фаз синусоиды

Fig. 4. Composite contour E_4 : a) in vector representation, b) in the form of the values of the initial phases of the sinusoid

С любой из этих моделей сигнал E_4 в аналитическом виде имеет одинаковое представление:

$$E_4 = \{1, 1, 1, 1, 1, i, -1, -i, 1, -1, 1, -1, 1, -i, -1, i\}. \quad (14)$$

Спектр Фурье КЭС E_4 равен (рис. 5):

$$P_{E_4} = \{4; 3,696 - 1,531i; -4i; -3,696 + 1,531i; 4; -1,531 - 3,696i; 4i; -1,531 - 3,696i; 4; -3,696 + 1,531i; -4i; 3,696 - 1,531i; 4; 1,531 + 3,696i; 4i; 1,531 + 3,696i\} \quad (15)$$

Модули значений компонент этого спектра одинаковы и имеют вид:

$$|\rho(m)|_0^{15} = \{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}. \quad (16)$$

Как видно из (16), энергетический спектр КЭС E_4 является равномерным и поэтому сигнал может быть сжат до минимально возможного уровня (рис. 6) [2].

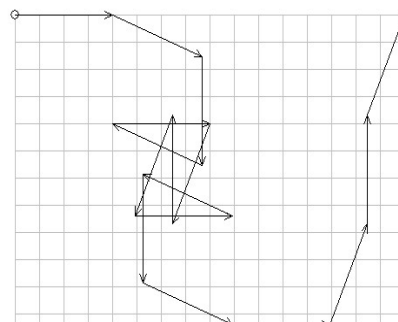


Рис. 5. Спектр Фурье КЭС E_4

Fig. 5. Fourier spectrum of the composite Eulerian signal E_4

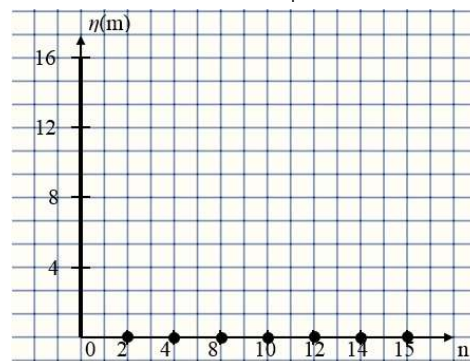


Рис. 6. Сжатый композиционный эйлеров сигнал E_4

Fig. 6. Compressed composite Eulerian signal E_4

Аддитивно-композиционный сигнал Эйлера. Ранее было рассмотрено сжатие композиционного эйлерова сигнала \mathbf{E}_k , состоящего из полного семейства элементарных эйлеровых сигналов $\mathbf{E}_{k,m}$. КЭС был получен в результате операций конкатенации всех ЭЭС $\mathbf{E}_{k,m}$, $m=0,1\dots k-1$. Размерность КЭС равна k^2 и определяется количеством составляющих его ЭЭС и числом компонент в каждом из них. После сжатия КЭС \mathbf{E}_k может иметь значение размерности, равное одному из чисел последовательности 4, 9, 16, 25... Получить размерность сжатого сигнала, равную, например 21, невозможно, так как $\sqrt{21}$ не является целым числом. Данное обстоятельство в ряде случаев усложняет решение проблемы улучшения разрешения по дальности.

Основными операциями для сжатия КЭС будут:

- вычисление спектров Фурье всех ЭЭС в составе КЭС,
- формирование КЭС путём конкатенации к ЭЭС, образующих их полное семейство,
- получение спектров Фурье КЭС и его энергетического спектра,
- сжатие КЭС.

Покажем возможность получения сигнала, обеспечивающего сжатие композиционного сигнала Эйлера с плавно меняющимися значениями своей размерности, т. е. $k=2, 3, 4, 5, \dots$, требующего значительно меньший вычислительный ресурс, более высокое отношение сигнал/шум в сжатом сигнале по сравнению с рассмотренным в предыдущем разделе КЭС \mathbf{E}_k .

Этот сигнал, обозначаемый далее как \mathbf{G}_k , формируется в результате сложения полного семейства элементарных эйлеровых сигналов и был назван аддитивно-

композиционным эйлеровым сигналом (АКС). Предварительно можно отметить его некоторые особенности:

- размерность представленного в векторном виде АКС равна k и совпадает с размерностями составляющих его ЭЭС;
- равномерный энергетический спектр АКС содержит k компонент.

Рассмотрим свойства сигнала \mathbf{G}_k , полученного суммированием полного семейства ЭЭС $\mathbf{E}_{k,m}$:

$$\mathbf{G}_k = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{E}_{k,m}, \quad (17)$$

где k – размерность АКС и составляющих его ЭЭС.

Для случая $k=4$ этот сигнал равен

$$\mathbf{G}_4 = \mathbf{E}_{4,0} + \mathbf{E}_{4,1} + \mathbf{E}_{4,2} + \mathbf{E}_{4,3}. \quad (18)$$

Отметим, что элементарные эйлеровы сигналы являются взаимно ортогональными векторами и спектр каждого из них задаётся выражением (10) и равен (рис. 7, а).

$$\rho(m) = \sum_{n=0}^3 \exp \left\{ i \frac{2\pi}{k} n(r-m) \right\} = \begin{cases} 4, & \text{при } r=m, \\ 0, & \text{при } r \neq n. \end{cases}$$

Спектр суммы r ЭЭС разных порядков m в соответствии с выражением (11) есть сумма спектров этих ЭЭС (рис. 5), поэтому спектр суммы полного семейства ЭЭС, задающих аддитивно-композиционный сигнал \mathbf{G}_k , состоит из k компонент, каждая из которых равна k , т. е. является равномерным (рис. 7, б). Обратное ДПФ даёт выражение для сигнала $\mathbf{G}_4 = \{4, 0, 0, 0\}$ (рис. 7, в). На рис. 7, г приведено представление АКФ $\mathbf{H} = \{\eta(n)\}_{n=0}^3 = \{16, 0, 0, 0\}$ сигнала \mathbf{G}_4 , являющейся изображением сжатого аддитивно-композиционного сигнала \mathbf{G} .

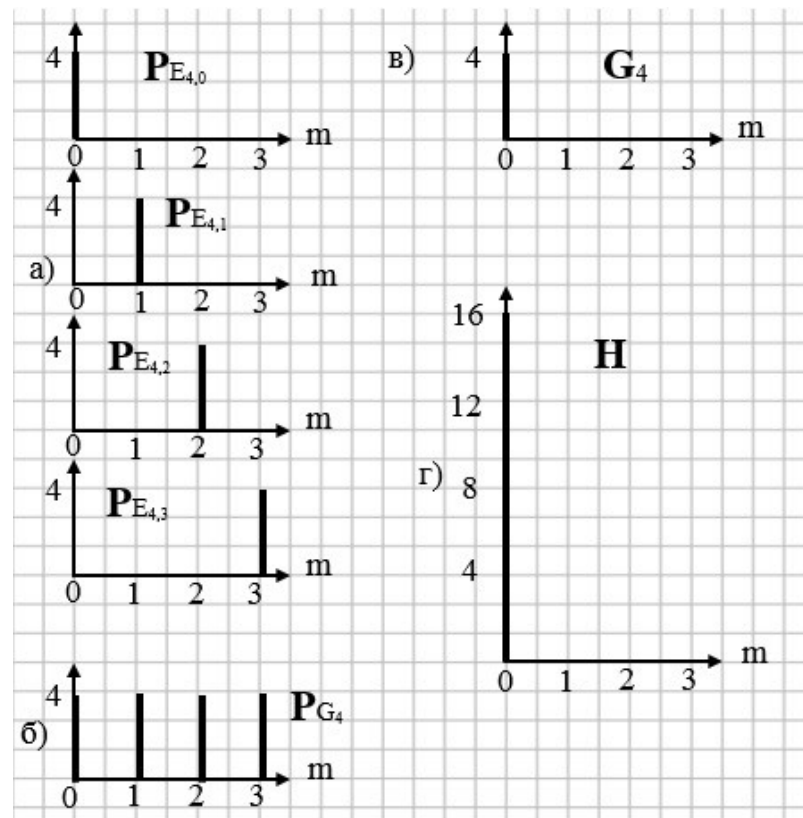


Рис. 7. К определению сжатого аддитивно-композиционного сигнала \vec{E}_4 : а) спектры ЭЭС $\vec{P}_{4,0}; \vec{P}_{4,1}; \vec{P}_{4,2}; \vec{P}_{4,3}$, б) спектр суммы полного семейства ЭЭС сигнала \vec{E}_4 , в) сигнал $\vec{G}_4 = \{4, 0, 0, 0\}$, г) АКФ аддитивно-композиционного сигнала \vec{G}_4

Fig. 7. To the definition of a compressed additive-composite signal \vec{E}_4 : а) EES spectra $\vec{P}_{4,0}; \vec{P}_{4,1}; \vec{P}_{4,2}; \vec{P}_{4,3}$, б) spectrum of the sum of the entire EES signal family, в) signal $\vec{G}_4 = \{4, 0, 0, 0\}$, г) ACF of the additive-composite signal \vec{G}_4 .

Заключение. В статье рассмотрены два вида сигналов КЭС и АКС, полученные на основе формулы Эйлера, связывающей тригонометрические и показательные функции в комплексном линейном пространстве. Композиционный эйлеров сигнал и аддитивно-композиционный сигнал, обладающие свойством сжатия по длительности при сохранении содержащейся в них энергии до и после сжатия.

Получение подобных сигналов актуально для радиолокации при необходимости улучшения их разрешающей способности по дальности. Оба сигнала представляют собой композиции полного семейства векторных элементарных сигна-

лов Эйлера в виде формулы Эйлера $\exp\left\{i \frac{2\pi}{k} m\right\}$, отличающиеся друг от друга значениями параметра $m, m=0,1,\dots,k-1$. Полное семейство ЭЭС состоит из k векторных сигналов размерности k .

Обычно в радиолокации для сжатия используются шумоподобные сигналы, огибающая которых представляет собой случайную последовательность, имеющую АКФ, близкую к δ -функции. Недостатком таких сигналов является наличие боковых лепестков у сжатого сигнала, вызванных отличием АКФ шумоподобного сигнала от δ -функции.

Предложенные в статье в качестве огибающих зондирующих сигналов КЭС и АКС позволяют с помощью линейных преобразований получить сжатые сигналы в виде символа Кронекера. Он физически точно реализуем и поэтому сжатый на его основе сигнал не имеет боковых лепестков.

Первый из рассмотренных в статье сигнал КЭС сформирован путём конкатенации полного семейства элементарных эйлеровых сигналов. В результате получен векторный комплекснозначный сигнал размерности k^2 со строго равномерным энергетическим спектром. На его основе был сформирован сжатый сигнал в виде k^2 – мерный символ Кронекера $\{k^2, 0, 0, \dots, 0\}$. Этот процесс был описан в работе [3]. Второй сигнал АКС представлен поразрядной суммой полного семейства составляющих его элементарных сигналов ЭЭС. Показано, что эта сумма задаёт k -мерный символ Кронекера $\{k, 0, 0, \dots, 0\}$ и может быть рассмотрена в качестве сжатого сигнала АСК.

Сравнение характеристик сигналов КЭС и АСК:

1) сигналы эффективно осуществляют операцию сжатия, обеспечивая за пределами главного лепестка в отличие от шумоподобных сигналов нулевой уровень выходного сигнала (при отсутствии шумов);

2) аддитивно-композиционный сигнал по сравнению с композиционным эйлеровым сигналом обладает следующими преимуществами:

- значительно, в 10 – 50 раз меньше требуемый вычислительный ресурс, связанный с отсутствием таких операций, как вычисление спектров Фурье ЭЭС и КЭС, энергетического спектра КЭС, а также операции конкатенации,

- в \sqrt{k} более низкая СКО шума,

- значение размерности сжатого сигнала, равное k , $k=2,3,4,5,\dots$, в отличие от значений размерности сжатого КЭС, равного k^2 , $k^2=2,9,16,25,\dots$

Список литературы

1. Ненашев В. А., Сеницын В. А., Страхов С. А. Исследование влияния промышленных помех на характеристики сжатия фазоманипулированных сигналов в первичных РЛС // Инновационные технологии и технические средства специального назначения: Труды IX общерос. науч.-практ. конф.: в 2 т. Сер. «Библиотека журнала "Военмех. Вестник БГТУ"» / Министерство образования и науки Российской Федерации; Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д. Ф. Устинова, 2017. С. 351-355.

2. Шенета А.П., Ненашев В.А. Система сжатия СРМ импульса в задачах высокочастотного картографирования // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов. Наука и образование. 2014. № 10 (65). С. 14.

3. Линейное преобразование конечномерного векторного сигнала в сигнал с формой символа Кронекера / Я.А. Фурман, А.А. Рожнецов, А.В. Кревецкий и др. // Радиотехника. 2017. № 1. С. 155-163.

4. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Г. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Главная редакция физико-математической литературы «Наука», 1974. 544 с.

5. Фурман Я.А. О двух замечательных видах замкнутых контуров изображений // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 6. С. 1054-1061.

6. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий, А.К. Передрев и др.; под ред. Я.А. Фурмана. 2-е изд. испр. М.: Физматлит, 2003. 592 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2020

Принята к публикации 01.12.2020

Информация об авторах

ФУРМАН Яков Абрамович – доктор технических наук, профессор кафедры радиотехнических и медико-биологических систем, Поволжский государственный технологический университет. Область научных интересов – цифровая обработка изображений и сигналов, распознавание образов. Автор 200 научных публикаций.

ЯМЩИКОВ Андрей Олегович – магистрант кафедры радиотехнических и медико-биологических систем, Поволжский государственный технологический университет. Область научных интересов – цифровая обработка изображений и сигналов, распознавание образов.

UDC 621.317.757

DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2020.4.29>

COMPOSITE EULERIAN SIGNAL WITH GOOD CORRELATION PROPERTIES AND LOW REQUIRED COMPUTING POWER

Ya. A. Furman, A. O. Yamshchikov

Volga State University of Technology,
3, Lenin Sq, Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation
E-mail: krtmbs@volgatech.net

Keywords: additive-composite signal; composite vector signal; compression of signals; Euler's formula.

ABSTRACT

Introduction. High range resolution is one of the urgent problems of modern radar. The existing approach to its solution is to synthesize sounding signals with delta-type autocorrelation function (ACF). Typically, the final circuit of the radar receiver computes the autocorrelation of the output signal. As a result, the echo signal from the most closely spaced targets on the display screen will be represented as separate in time pulses. This solution to the problem of increasing the radar range resolution is referred to as echo compression. The **aim** of the research is to expand the class of composite signals that allow to perform their effective compression. The **proposed approach** is to use sounding signals with a discrete envelope, which allows one to represent it in the form of a single pulse (Kronecker symbol). A compressed signal consists of a single thin lobe of one resolution element width without any sidelobes, and its energy is equal to the energy of the original signal. Signals with similar properties are relatively unknown. One of them is the signals in the form of a composition (sequence) of elementary Eulerian signals (EES). **Conclusion.** The paper discusses two types of signals, CES and ACS, that are obtained on the basis of the Euler's formula and can be compressed over the range keeping the conveyed energy. The CES signal is synthesized by concatenation of a complete family of elementary Eulerian signals. This operation yields a discrete complex-valued signal of k^2 dimension with a strictly uniform energy spectrum. The ACS signal is computed by the bitwise sum of the complete family of its constituent elementary signals EES. It was shown that this sum defines the k -dimensional Kronecker symbol and can be considered as a compressed signal.

REFERENCES

1. Nenashev V. A., Sinitsyn V. A., Strakhov S. A. Issledovanie vlijanija industrial'nyh pomeh na harakteristiki szhatija fazomanipulirovannyh signalov v pervichnyh RLS [Investigation of the influence of industrial noise on the compression characteristics of phase-shift keyed signals in primary radars]. *Innovacionnye tehnologii i tehniczeskie sredstva special'nogo naznachenija: tr. IX obshheros. nauch.-prakt. konf.: v 2 t. Ser. «Biblioteka zhurnala "Voenmeh. Vestnik BGTU"»* [Innovative technologies and special-purpose technical facilities: proc. IX general Russian. scientific-practical Conf.: in 2 vol. Ser. "Library of the journal" Voenmeh. Vestnik BSTU"]. Ministry of Education and Science of the Russian Federation; Baltic State Technical University "Voenmeh" D.F. Ustinova. 2017. P. 351-355. (In Russ.).
2. Shepeta A. P., Nenashev V. A. Sistema szhatija SRM impul'sa v zadachah vysokochastotnogo kartografirovanija [CPM pulse compression system in high-frequency mapping problems]. *Hroniki obediennogo fonda jelektronnyh resursov. Nauka i obrazovanie* [Chronicles of the United Fund of Electronic Resources. Science and education]. 2014. No 10 (65). P. 14. (In Russ.).
3. Furman Ya. A., Rozhentsov A. A., Krevetsky A. V. et al. Linejnoe preobrazovanie konechnomernogo vektornogo signala v signal s formoj simvola Kronekera [Linear transformation of finite-dimensional vector signal into a kronecker delta]. *Radiotekhnika* [Radio Engineering]. 2017. No 1. P. 155-163. (In Russ.).
4. Efimov N. V., Rosendorn E. G. *Linejnaja algebra i mnogomernaja geometrija* [Linear algebra and multidimensional geometry]. Moscow, Main edition of physical and mathematical literature "Nauka", 1974. 544p. (In Russ.).
5. Furman Ya. A. O dvuh zamechatel'nyh vidah zamknutyh konturov izobrazhenij [About two great types of closed contours of images]. *Radiotekhnika i*

jelektronika [Radio Engineering and Electronics]. 1993. Vol 38. No 6. P. 1054-1061.

5. Furman Ya. A., Krevetsky A. V., Peredreev A. K. et al. *Vvedenie v konturnyj analiz i ego prilozhenija*

k obrabotke izobrazhenij i signalov [Introduction to contour analysis and its applications to image and signal processing]. ed. by Ya. A. Furman. 2nd ed. Rev. Moscow, Fizmatlit., 2003. 592 p. (In Russ.).

The article was received 22.09.2020

Accepted for publication 01.12.2020

For citation: Furman Ya. A., Yamshchikov A. O. Composite Eulerian Signal with Good Correlation Properties and Low Required Computing Power. *Vestnik of Volga State University of Technology. Ser.: Radio Engineering and Infocommunication Systems*. 2020. No 4 (48). Pp. 29-39. DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2020.4.29>

Information about the authors

Yakov A. Furman – Doctor of Technical Sciences degree, professor at the Department of Radio Engineering and Biomedical Systems of Volga State University of Technology. Research interests – digital image and signal processing, pattern recognition. The author of 200 scientific publications.

Andrey O. Yamschikov – Master's student at the Department of Radio Engineering and Biomedical Systems of Volga State University of Technology. Research interests – digital image and signal processing, pattern recognition.