

Научная статья
УДК 004.93
<https://doi.org/10.25686/2306-2819.2021.4.42>

Способы увеличения скорости непрерывного вейвлет-преобразования при решении задач декомпозиции и реконструкции сигналов

С. Г. Чумаров[✉], В. И. Семенов, Г. П. Охоткин, П. С. Лысов

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
Российская Федерация, 428015, Чебоксары, Московский проспект, 15
chumarov@mail.ru[✉]

Аннотация. Вейвлеты, сконструированные в частотной области, позволяют уменьшить время декомпозиции и реконструкции одномерных и двумерных сигналов. Одновременно увеличивается качество анализа и точность реконструкции нестационарных сигналов, так как вейвлет-преобразование является ортогональным. Сконструированы вейвлеты с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой, которые нельзя получить во временной области из-за явления Гиббса.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование; преобразование Фурье; алгоритм; декомпозиция; реконструкция

Введение. Рост требований к производительности численных методов обработки информации, при увеличении скорости действия ЭВМ, расширении памяти, снижении стоимости арифметической операции и единицы памяти увеличивает потребность в создании новых эффективных численных методов, требующих возможно меньших вычислительных затрат. Алгоритмы обработки многомасштабных представлений, основанные на вейвлет-преобразовании (ВП), достаточно надёжны и эффективны в реализации.

Вычисление непрерывного ВП прямым численным интегрированием для больших временных последовательностей (например, для изображений) занимает длительное время. Даже при использовании современных компьютеров с частотой несколько ГГц для изображения размером 512x512 пикселей требуется время декомпозиции на один уровень несколько десятков секунд. Учитывая, что необходимо для трёх цветов производить ВП, очень важным моментом является реализация быстрых алгоритмов преобразования и рекон-

струкции сигналов. Поэтому численное вычисление непрерывного ВП производится в частотной области [1–6]. В работе предложены алгоритмы вычисления прямого и обратного непрерывного ВП в частотной области, которые позволяют с высокой скоростью и точностью разложить, реконструировать и фильтровать изображение. Актуальность исследуемой проблемы обусловлена тем, что непрерывное ВП позволяет производить кратномасштабный анализ сигналов с кратностью, меньшей двух. Также конструирование симметричных и антисимметричных ортогональных вейвлетов в частотной области с максимально возможным количеством нулевых моментов позволяет анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие, что даёт возможность концентрировать энергию в немногих значимых коэффициентах, что является предпосылкой для сжатия [7–8]. Такие вейвлеты позволяют уменьшить время непрерывного ВП на несколько порядков по сравнению с прямым численным интегрированием.

© Чумаров С. Г., Семенов В. И., Охоткин Г. П., Лысов П. С., 2021.

Для цитирования: Чумаров С. Г., Семенов В. И., Охоткин Г. П., Лысов П. С. Способы увеличения скорости непрерывного вейвлет-преобразования при решении задач декомпозиции и реконструкции сигналов // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2021. № 4 (52). С. 42–51. DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2021.4.42>

Цель работы – увеличение точности декомпозиции и реконструкции одномерных и двумерных сигналов, с уменьшением времени вычисления в реализованных алгоритмах.

Вычисление прямого непрерывного ВП сигналов в частотной области. Непрерывное ВП одномерного сигнала $S(t)$ – это его представление в виде интеграла Фурье по системе базисных функций $\psi(t)$:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (1)$$

Вычисление ВП прямым численным интегрированием для больших временных последовательностей по формуле (1) занимает длительное время. При прямом численном вычислении ВП требуется N^2 операций умножения. В математике принято обозначение $O(N^2)$. Для увеличения быстродействия авторами разработаны алгоритмы прямого непрерывного быстрого ВП в частотной области с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ). Количество вычислительных операций ВП с применением БПФ растёт пропорционально $N \log_2 N (O(N \log_2 N))$. Вычисление вейвлет-спектра представляет собой свёртку сигнала и вейвлета, поэтому при преобразовании Фурье свёртки фурье-спектры сигнала и вейвлета перемножаются. Чтобы перейти из частотной области во временную область, необходимо вычислить обратное преобразование Фурье полученного комплексно-сопряжённого спектра. Таким образом, для того чтобы вычислить ВП сигнала в частотной области, необходимо получить фурье-спектры сигнала и вейвлета для разных масштабных коэффициентов a , найти комплексно-сопряжённый спектр и обратным преобразованием Фурье комплексно-сопряжённых спектров получить вейвлет-спектр сигнала.

Алгоритм численного вычисления прямого непрерывного быстрого ВП сигнала $S(t)$ по формуле (1) в частотной области включает следующие шаги [1–6]:

1. Вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда $a_1(n), b_1(n)$ сигнала $S(k)$ с использованием БПФ:

$$a_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right); \quad (2)$$

$$b_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (3)$$

2. Вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда $a_2(n), b_2(n)$ вейвлета $\psi(k)$ с использованием БПФ:

$$a_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right); \quad (4)$$

$$b_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (5)$$

3. Вычисляется комплексно-сопряжённый спектр:

$$c_1(n) = a_1(n) \cdot a_2(n) + b_1(n) \cdot b_2(n); \quad (6)$$

$$c_2(n) = b_1(n) \cdot a_2(n) - a_1(n) \cdot b_2(n). \quad (7)$$

Большинство непрерывных вейвлетов либо чётные, либо нечётные функции. Для чётных вейвлетов ряд составлен из одних косинусов, а для нечётных – из одних синусов. Для чётных вейвлетов $b_2(n) = 0$ и

$$c_1(n) = a_1(n) \cdot a_2(n); \quad (8)$$

$$c_2(n) = b_1(n) \cdot a_2(n). \quad (9)$$

Для нечётных вейвлетов $a_2(n) = 0$ и

$$c_1(n) = b_1(n) \cdot b_2(n); \quad (10)$$

$$c_2(n) = -a_1(n) \cdot b_2(n). \quad (11)$$

Вейвлет-спектр $W(a, b)$ (матрица вейвлет-коэффициентов $M \times N$) для входного анализируемого сигнала длиной N отсчётов получается путём вычисления M обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряжённого спектра по формуле:

$$W(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} (c_1(k) + i c_2(k)) \times \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (12)$$

Вычисление обратного непрерывного ВП сигналов в частотной области. Подобно обратному преобразованию Фурье существует обратное непрерывное ВП:

$$S(t) = C_{\psi}^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \times W(a,b) \frac{dadb}{a^{3+k}}, \quad (13)$$

где C_{ψ} – нормализующий коэффициент:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\psi}(\omega)|^2 \cdot \omega^{-1} d\omega < \infty,$$

где $F_{\psi}(\omega)$ – фурье-спектр базисной функции, ω – циклическая частота, параметр k – показатель степени масштабного множителя.

Вычисление обратного ВП прямым численным интегрированием для больших временных последовательностей по формуле (13) занимает длительное время. Для увеличения быстродействия авторами разработан алгоритм обратного непрерывного быстрого ВП в частотной области с использованием БПФ. Нормализующий коэффициент в формуле (13) непрерывного обратного ВП $C = C_{\psi}$ в разработанном алгоритме вычисляется из аналога теоремы Парсеваля для вейвлет-коэффициентов:

$$\int S(t) S^*(t) dt = C^{-1} \iint W(a,b) \times W^*(a,b) \frac{dadb}{a^2}. \quad (14)$$

На практике вычисление C легче производить, сравнивая максимумы оригинального и реконструированного сигнала. После определения нормализующего коэффициента C он подставляется в следующую формулу:

$$S(t) = C^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \times W(a,b) \frac{dadb}{a^2}. \quad (15)$$

Теоретической основой вычисления обратного непрерывного быстрого ВП сигнала $S(t)$ в частотной области является использование формул (14) и (15). Обратным преобразованием произведения спектров вейвлет-спектра $W(a,b)$ и вейвлета $\psi(t)$ вычисляется интеграл по переменной b . Суммированием полученного интеграла по масштабному коэффициенту a рассчитывается реконструированный сигнал $S(t)$.

Алгоритм численного вычисления обратного непрерывного ВП по формуле (13) в частотной области включает следующие шаги:

1. Вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда $d_1(n)$ вейвлет-спектра $W(a,b)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$d_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(a,k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (16)$$

2. Вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда $e_1(n)$ вейвлет-спектра $W(a,b)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$e_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(a,k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (17)$$

3. Вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда $d_2(n)$ вейвлета $\psi(t)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$d_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (18)$$

4. Вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда $e_2(n)$ вейвлета $\psi(t)$ с использованием прямого БПФ по формуле:

$$e_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (19)$$

5. Вычисляется комплексно-сопряжённый спектр по формулам:

$$f_1(n) = d_1(n) \cdot d_2(n) + e_1(n) \cdot e_2(n); \quad (20)$$

$$f_2(n) = e_1(n) \cdot d_2(n) - d_1(n) \cdot e_2(n). \quad (21)$$

Для чётных вейвлетов ряд составлен из одних косинусов, а для нечётных – из одних синусов. Для чётных вейвлетов $e_2(n) = 0$ и

$$f_1(n) = d_1(n) \cdot d_2(n); \quad (22)$$

$$f_2(n) = e_1(n) \cdot d_2(n). \quad (23)$$

Для нечётных вейвлетов $d_2(n) = 0$ и

$$f_1(n) = e_1(n) \cdot e_2(n); \quad (24)$$

$$f_2(n) = -d_1(n) \cdot e_2(n). \quad (25)$$

6. Для чётного вейвлета путём $M+1$ обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряжённого спектра (22), (23) вычисляется функция $s'_m(n)$:

$$s'_m(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (f_1(k) + if_2(k)) \times \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (26)$$

7. Для нечётного вейвлета путём $M+1$ обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряжённого спектра (24), (25) вычисляется функция $s'_m(n)$:

$$s'_m(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (f_1(k) + if_2(k)) \times \exp\left(i \frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (27)$$

(в этой формуле символ $'$ не означает дифференцирование).

8. По формуле (14) вычисляется нормализующий коэффициент C .

9. По формуле

$$S(n) = C \sum_{j=0}^m s'_m(n) \quad (28)$$

реконструируется сигнал, где m – уровень декомпозиции [7–9].

Профилировка программы численного вычисления непрерывного ВП в частотной области и вычисления прямым численным интегрированием. Результаты ВП сигналов сравнивались для прямого численного интегрирования и вычисления в частотной области с использованием БПФ. В качестве вейвлетов использовались производные функции Гаусса второго порядка. Время вычисления прямым численным интегрированием и вычисления ВП с использованием БПФ сравнивалось на языке *Visual C++*. За счёт применения БПФ время вычисления в частотной области уменьшается в 6 000 раз для выборки сигнала из 32 768 отсчётов. Для профилировки использовался счётчик меток реального времени, доступ к которому реализован при помощи ассемблерной команды *RDTSC* (*ReadFromTimeStampCounter*). Счётчик меток ре-

ального времени *TSC* (*TimeStampCounter*) – 64-разрядный регистр, содержимое которого инкрементируется с каждым тактом процессорного ядра. Каждый раз при аппаратном сбросе (сигналом *RESET*) отсчёт в счётчике *TSC* начинается с нуля. Разрядность регистра обеспечивает отсчёт времени без переполнения в течение сотен лет. Разрешающая способность счётчика определяется тактовой частотой процессора. Минимальный промежуток времени между двумя измерениями равен обратному значению тактовой частоты. Для использованного процессора с тактовой частотой 2,54 ГГц разрешающая способность равна 0,39 нс. Тактовая частота определена с использованием счётчика реального времени *TSC*. Команда *RDTSC* возвращает количество тактов с момента запуска процессора, помещая результат в пару регистров общего назначения *EDX:EAX*. Для измерения времени вычисления ВП написана программа с помощью встроенного ассемблера языка *C++*. Счётчик отградуирован с помощью стандартной функции *OC-Sleep*. Функция *Sleep* приостанавливает выполнение потока на 1 000 мс, если параметр функции равен 1 000. Показания счётчика *TSC* считываются перед вызовом функции *Sleep* и после возврата из неё. Разница этих показаний запоминается в переменной *t_time*. Количество машинных тактов, прошедших за одну секунду *t_time*, делится на 1 000 000 и запоминается в коэффициенте *n_count*, определяющем, сколько тактов содержится в одной микросекунде. Так как переменная *t_time* не равна нулю даже при отсутствии функции *Sleep*, необходимо внести поправки в переменную *t_time*. После вычисления калибровочного коэффициента *n_count* профилировка ВП осуществляется следующим образом. Показания счётчика *TSC* считываются перед вычислением ВП и после окончания преобразования запоминаются в переменной *t_time*. Полученное значение *t_time* делится на калибровочный коэффициент *n_count* и запоминается в переменной, которая показывает время

выполнения ВП в микросекундах. Использовался процессор *Celeron*® 2,54 ГГц, ОЗУ 1 Гб.

Конструирование вейвлетов в частотной области для увеличения скорости непрерывного ВП. Время вычисления ВП можно уменьшить ещё больше, конструируя вейвлеты в частотной области. Чтобы уменьшить время вычисления, необходимо в алгоритмах прямого и обратного ВП в частотной области произвести некоторые изменения.

Первый способ – это конструирование вейвлетов в частотной области, чтобы не вычислять коэффициенты тригонометрического ряда $a_2(n)$, $b_2(n)$ во втором шаге.

Второй способ – это использование свойства чётности или нечётности вейвлетов, то есть симметричности и антисимметричности. Для чётных вейвлетов ряд составлен из одних косинусов, а для нечётных – из одних синусов.

Третий способ – это вычисление M обратных преобразований Фурье от комплексно-сопряжённого спектра только через определённые интервалы по формуле (12).

То есть для малых масштабных коэффициентов через меньший интервал, для больших масштабных коэффициентов через больший интервал. В алгоритме БПФ такое возможно. Таким образом получается число коэффициентов вейвлет-спектра равным числу отсчётов исходного сигнала, то есть не избыточное ВП. Эти вейвлет-коэффициенты можно использовать для сжатия сигнала, предварительно приравняв к нулю величины меньше некоторого порога. Линейным или нелинейным интерполированием этих вейвлет-коэффициентов легко реконструировать сигнал обратным ВП. Нелинейным интерполированием сигнал точнее реконструируется. При нелинейном интерполировании используются те же вейвлеты, что и при декомпозиции. Время вычисления ВП уменьшается в 2,5 раза для выборки из 32 768 отсчётов. При обработке изображений выборка становится ещё больше и, соответственно, время вычисления

уменьшится ещё на большую величину. Так как при обработке цветных изображений необходимо получать вейвлет-спектр для трёх цветов (*RGB*) по оси горизонтали и по вертикали, экономия времени значительная.

Четвёртый способ – это использование такого свойства при ВП цветных изображений, как независимость цвета для малых масштабных коэффициентов, то есть вейвлет-коэффициенты красного, синего и зелёного цвета имеют одинаковую величину. Достаточно вычислить вейвлет-спектр для одного цвета. Это свойство можно использовать для сжатия, так как для малых вейвлет-коэффициентов трёхкратное сжатие получается без кодирования. То, что для малых масштабных коэффициентов все три цвета имеют одинаковые вейвлет-коэффициенты, человеческий глаз использует, по всей вероятности, очень хорошо. Количество палочек, которые отвечают за сумеречное зрение, в человеческом глазу 130 миллионов, а количество колбочек, которые отвечают за цветное зрение, семь миллионов. Колбочки расположены дальше друг от друга, чем палочки, так как цвета проявляются только при больших масштабах. Интенсивность для малых масштабных коэффициентов меньше, чем для больших, значит, приёмники излучения должны быть более чувствительными для малых масштабов, то есть чувствительность палочек должна быть выше, чем у колбочек. На самом деле палочки чувствуют более слабый свет, чем колбочки.

Пятый способ – это конструирование вейвлетов таким образом, чтобы исключить вычисление нормализующего коэффициента при реконструкции.

Шестой способ – это применение четвёртого способа при реконструкции так, чтобы можно было вейвлет-коэффициенты одного цвета использовать для всех цветов в 1, 2, 5, 6, 7, 8 шагах в алгоритме обратного ВП и при кратном масштабном анализе.

Седьмой способ – это конструирование вейвлетов и предварительная обработка вейвлет-коэффициентов таким образом, чтобы можно было реконструировать сигнал с порядком вычислительных операций $O(N)$. Этот способ позволяет уменьшить время реконструкции сигнала в 1 000 раз по сравнению с алгоритмом с использованием БПФ для выборки сигнала из 32 768 отсчётов. По сравнению с прямым численным интегрированием более в 1 000 000 раз.

Объяснить такое увеличение скорости вычисления ВП можно тем, что при вычислении в частотной области сконструированные вейвлеты являются не только ортогональными, но и нормированными, то есть ортонормированными. Кроме этого вейвлеты имеют прямоугольную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), что нельзя получить во временной области из-за явления Гиббса. На рис. 1

представлен один из вейвлетов, сконструированных в частотной области. На рис. 2 представлена АЧХ этого вейвлета в децибелах. Видно, что в полосе задерживания ослабление около -300 дБ, что сравнимо с погрешностью вычисления. Скалярное произведение таких вейвлетов равно нулю в пределах погрешности. Такое наблюдается для всех скалярных произведений вейвлетов с другими масштабными коэффициентами. На рис. 3 представлена АЧХ этого вейвлета. На АЧХ нет никаких пульсаций в полосе пропускания. Видно, что нет и переходной полосы. На рис. 4 представлена АЧХ фильтров верхних частот, синтезированных во временной и частотной областях в децибелах. До частоты 128 единиц представлена частотная характеристика фильтра, синтезированного во временной области, а от 129 до 256 – фильтра, синтезированного в частотной области.

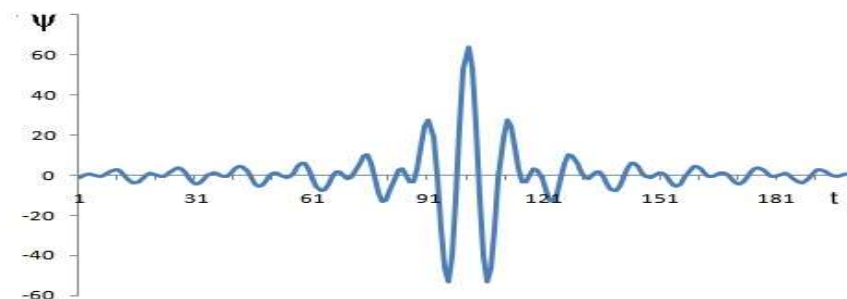


Рис. 1. Ортогональный симметричный вейвлет
Fig. 1. Orthogonal symmetric wavelet

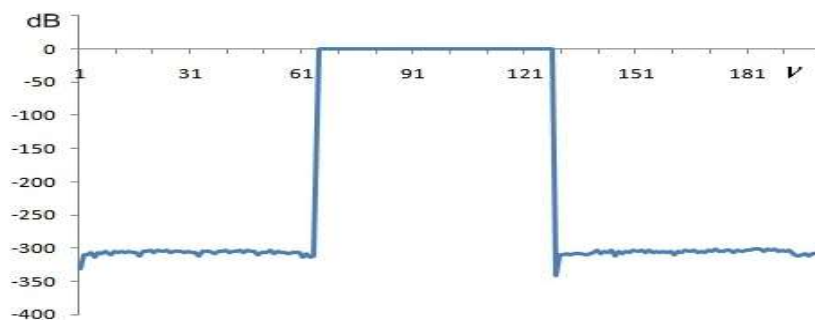


Рис. 2. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета в дБ
Fig. 2. Frequency response of a symmetric orthogonal wavelet in dB

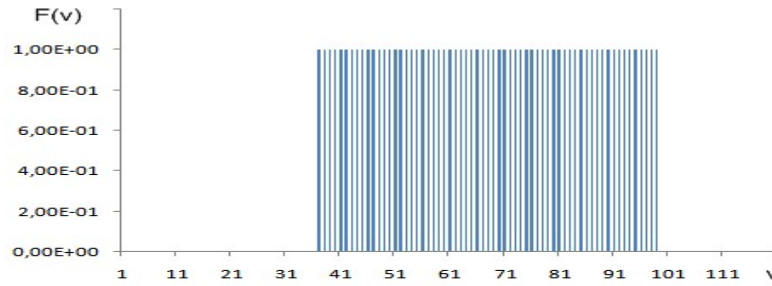


Рис. 3. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета
Fig. 3. Frequency response of a symmetric orthogonal wavelet

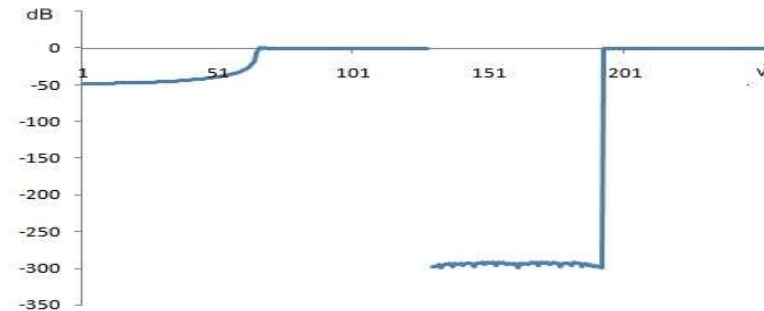


Рис. 4. АЧХ фильтра верхних частот, синтезированного во временной и частотной областях в dB
Fig. 4. Frequency response of a high-pass filter synthesized in the time and frequency domains in dB

Вейвлеты с самым меньшим значением масштабного коэффициента являются фильтрами верхних частот. Коэффициенты импульсной характеристики фильтра вычислены по формуле:

$$b_{N+k} = \frac{1}{N+1} \times \sum_{j=\frac{N+1}{2}}^N \cos\left(\frac{\pi k(j+0,5)}{N+1}\right). \quad (29)$$

На рис. 4 отчётливо видно, насколько сильно отличаются частотные характеристики этих фильтров при сопоставлении их в одинаковом масштабе. Для фильтра, синтезированного во временной области, также наблюдается явление Гиббса.

Выводы. Вейвлеты, или цифровые фильтры, полученные в частотной области, имеют идеальную АЧХ в пределах погрешности вычисления. Такие вейвлеты

позволяют очень точно реконструировать сигнал. Вейвлеты с прямоугольной АЧХ позволили уменьшить время вычисления прямого ВП в частотной области в два раза по сравнению с тем, когда использовались вейвлеты на основе производных функций Гаусса. Время вычисления обратного ВП сигнала с размером выборки 32 768 и 262 144 отсчётов уменьшилось в 260 и 5 000 раз соответственно по сравнению с алгоритмом с использованием БПФ. Конструирование симметричных и антисимметричных вейвлетов с прямоугольной АЧХ позволило обратное ВП вычислять не менее, чем в 10 000 000 раз быстрее, чем при прямом численном интегрировании. Таким образом, время декомпозиции изображений размером 512x512 пикселей на один уровень удалось уменьшить до менее чем полсекунды. А время реконструкции происходит практически мгновенно.

Список источников

1. Viliam Ďuriš, Vladimir I. Semenov, Sergey G. Chumarov. Wavelets and digital filters designed and synthesized in the time and frequency domains // Mathematical Biosciences and Engineering. 2022. Vol. 19, Iss. 3. Pp. 3056-3068. DOI: 10.3934/mbe.2022141.
2. Ďuriš V., Semenov V. I., Chumarov S. G. Application of continuous fast wavelet transform for sig-

nal processing. 1st. ed., London: Sciemcee Publishing. 2021, 181 p.
3. The Orthogonal Wavelets in the Frequency Domain Used for the Images Filtering / V. Ďuriš, S. G. Chumarov, G. M. Mikheev et al. // IEEE Access. 2020. Vol. 8. Pp. 211125-211134, DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3039373.

4. Фильтрация изображений, полученных с помощью оптического микроскопа, с применением кратномасштабного анализа / В.И. Семенов, А.К. Шурбин, К.Г. Михеев и др. // Химическая физика и мезоскопия. 2014. № 3. С. 399-404.

5. Конструирование ортогональных вейвлетов в частотной области для кратномасштабного анализа сигналов / В.И. Семенов, А.К. Шурбин, К.Г. Михеев и др. // Химическая физика и мезоскопия. 2018. № 2. С. 230-238.

6. Семенов В.И., Желтов П.В. Способ распознавания ключевых слов в слитной речи. Патент №2403628 РФ, № 2008141557/09(053961). Заявл. 20.10.2008; Опубл. 10.11.2008.

7. Семенов В.И., Чучкалов С.И., Христофоров О.В. Конструирование вейвлетов в частотной

области // Journal of Advanced Research in Technical Science. North Charleston, USA: SRC MS, CreateSpace. 2017. Iss. 7-2. P. 26-29.

8. Семенов В.И., Чучкалов С.И., Шурбин А.К. Конструирование вейвлетов с максимально возможным количеством нулевых моментов // Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: материалы XI Всерос. науч.-техн. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. С. 227-230.

9. Семенов В.И., Чучкалов С.И., Шурбин А.К. Синтез цифровых фильтров в частотной области // Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем: материалы XIII Всерос. науч.-техн. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2019. С. 49-51.

Статья поступила в редакцию 29.11.2021; одобрена после рецензирования 10.12.2021; принята к публикации 15.12.2021

Информация об авторах

ЧУМАРОВ Сергей Геннадьевич – кандидат технических наук, заведующий кафедрой радиотехники и радиотехнических систем, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова. Область научных интересов – цифровая обработка радиосигналов, вейвлет-преобразование, инженерное образование, системы автоматизированного проектирования, программно-определяемое радио. Автор 73 научных публикаций. ORCID: 0000-0002-4946-3685.

СЕМЕНОВ Владимир Ильич – кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова. Область научных интересов – цифровая обработка сигналов и изображений, непрерывное быстрое вейвлет-преобразование. Автор 123 научных публикаций. ORCID: 0000-0001-8968-7459.

ОХОТКИН Григорий Петрович – доктор технических наук, декан факультета радиоэлектроники и автоматики, заведующий кафедрой автоматики и управления в технических системах, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова. Область научных интересов – динамика цифровых систем управления, цифровая обработка сигналов, непрерывное быстрое вейвлет-преобразование, автоматизация и управление технологическими процессами. Автор 165 научных публикаций.

ЛЫСОВ Павел Сергеевич – студент факультета радиоэлектроники и автоматики, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова. Область научных интересов – цифровая обработка радиосигналов, непрерывное быстрое вейвлет-преобразование, программно-определяемое радио. Автор четырех научных публикаций.

Вклад авторов:

Чумаров С. Г. – концептуализация, методология, проверка, исследование.

Семенов В. И. – концептуализация, методология, проверка, исследование, компьютерное моделирование, надзор.

Охоткин Г. П. – концептуализация, методология, проверка, исследование, рецензирование.

Лысов П. С. – проверка, исследование, компьютерное моделирование, редактирование.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Scientific article

UDC 004.93

<https://doi.org/10.25686/2306-2819.2021.4.42>**Ways to Increase the Speed of Continuous Wavelet Transform in Solving Problems of Signal Decomposition and Reconstruction****S. G. Chumarov[✉], V. I. Semenov, G. P. Okhotkin, P. S. Lysov**

I.N. Ulyanov Chuvash State University,

15, Moskovsky avenue, Cheboksary, 428015, Russian Federation

chumarov@mail.ru[✉]**Keywords:** wavelet transform; Fourier transform; algorithm; decomposition; reconstruction**ABSTRACT**

Introduction. The paper proposes algorithms for calculating forward and inverse continuous WT in the frequency domain, which can be used for the decomposition and reconstruction of signals with high speed and accuracy. Also, ways to improve algorithms to further increase the speed of calculating the WT are proposed. The relevance of the problem under study is due to the fact that continuous WT allows for multi-scale analysis of signals with a multiplicity of less than two. Also, the construction of symmetric and antisymmetric orthogonal wavelets in the frequency domain with the maximum possible number of zero moments makes it possible to analyze a more subtle (high-frequency) structure of the signal, suppressing its slowly changing components, which makes it possible to concentrate energy in a few significant coefficients, which is a prerequisite for compression. Such wavelets make it possible to reduce the time of continuous wavelet transformation by several orders of magnitude compared to direct numerical integration. **The aim of the research** is an increase in the accuracy of decomposition and reconstruction of one-dimensional and two-dimensional signals, with a decrease in the calculation time in the implemented algorithms. **Research methods.** To increase the speed, the authors have developed algorithms for forward and inverse continuous fast WT in the frequency domain using the fast Fourier transform (FFT). **Research finding and discussion.** The calculation time of forward and inverse WT signals in the frequency domain was compared with the calculation time of forward and inverse WT by direct numerical integration. A new wavelet is proposed that allows a 1,000,000-fold increase in the speed of the inverse WT compared to direct numerical integration. **Conclusions.** Wavelets or digital filters obtained in the frequency domain have an ideal frequency response within the calculation error and allow very accurate signal reconstruction. Wavelets with rectangular frequency response made it possible to reduce the calculation time of direct WT in the frequency domain by 2 times compared to when wavelets based on derivatives of the Gaussian function were used. And the calculation time of the reverse WT signal with a sample size of 32768 and 262144 samples decreased by 260 and 5000 times, respectively, compared to the algorithm using the FFT.

REFERENCES

1. Viliam Ďuriš, Vladimir I. Semenov, Sergey G. Chumarov. Wavelets and digital filters designed and synthesized in the time and frequency domains. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2022. 19(3): 3056-3068. DOI: 10.3934/mbe.2022141.
2. Ďuriš V., Semenov V. I., Chumarov S. G. Application of continuous fast wavelet transform for signal processing. 1st. ed., London: Sciece Publishing. 2021, 181 p.
3. Ďuriš V., Chumarov S. G., Mikheev G. M. et al. The Orthogonal Wavelets in the Frequency Domain Used for the Images Filtering. *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 211125-211134, DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3039373.
4. Semenov V.I., SHurbin A.K., Miheev K.G., Miheev G.M. Fil'traciya izobrazhenij, poluchennyh s pomoshch'yu opticheskogo mikroskopa, s primeneniem kratnomasshtabnogo analiza [Filtering of images obtained using an optical microscope using multiple-scale analysis]. *Himicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical physics and mesoscopy]. 2014. No 3. Pp. 399-404 (In Russ.).
5. Semenov V.I., Shurbin A.K., Miheev K.G., Miheev G.M. Konstruirovaniye ortogonal'nyh vejvletov v chastotnoj oblasti dlya kratnomasshtabnogo analiza signalov [Construction of orthogonal wavelets in the frequency domain for multiscale signal analysis]. *Himicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical physics and mesoscopy]. 2018. No 2. Pp. 230-238 (In Russ.).
6. Semenov V.I. ZHeltov P.V. Sposob raspoznavaniya klyuchevyh slov v slitnoj rechi [A method for recognizing keywords in a single speech]. *Patent*

№2403628RU, № 2008141557/09 (053961). Appl. 20.10.2008; Publ. 10.11.2008 (In Russ.).

8. Semenov V.I., Chuchkalov S.I., Shurbin A.K. Konstruirovaniye vejvletov s maksimal'no vozmozhnym kolichestvom nulevykh momentov [Constructing wavelets with the maximum possible number of zero moments]. *Informacionnye tekhnologii v elektrotekhnike i elektroenergetike* [Proc. XI Rus. Symp. Information technologies in electrical engineering and

electric power industry]. Cheboksary: Chuvash University Publishing House. 2018. P. 227-230 (In Russ.).

9. Semenov V.I., Chuchkalov S.I., Shurbin A.K. Sintez cifrovyykh fil'trov v chastotnoj oblasti [Synthesis of digital filters in the frequency domain]. *Dinamika nelinejnykh diskretnykh elektrotekhnicheskikh i elektronnykh sistem* [Proc. XIII Rus. Symp. Dynamics of nonlinear discrete electrical and electronic systems]. Cheboksary: Chuvash University Publishing House. 2019. P. 49-51 (In Russ.).

The article was submitted 29.11.2021; approved after reviewing 10.12.2021; accepted for publication 15.12.2021

For citation: Chumarov S. G., Semenov V. I., Okhotkin G. P., Lysov P. S. Ways to Increase the Speed of Continuous Wavelet Transform in Solving Problems of Signal Decomposition and Reconstruction. *Vestnik of Volga State University of Technology. Ser.: Radio Engineering and Infocommunication Systems*. 2021. No 4 (52). Pp. 42–51. DOI: <https://doi.org/10.25686/2306-2819.2021.4.42>

Information about the authors

Sergey G. Chumarov – Candidate of Engineering Sciences, Head of the Department of Radio Engineering, I. N. Ulyanov Chuvash State University. Research interests – digital processing of radio signals, wavelet transform, engineering education, computer-aided design systems, software-defined radio. The author of 73 scientific publications. ORCID: 0000-0002-4946-3685.

Vladimir I. Semenov – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of the Department of General Physics, I. N. Ulyanov Chuvash State University. Research interests – digital signal and image processing, continuous fast wavelet transform. The author of 123 scientific publications. ORCID: 0000-0001-8968-7459.

Grigory P. Okhotkin – Doctor of Engineering Sciences, Dean of Faculty of Radioelectronics and Automation, Head of the Department of Automation and Control in Technical Systems, I. N. Ulyanov Chuvash State University. Research interests – dynamics of digital control systems, digital signal processing, continuous fast wavelet transform, automation and control of technological processes. The author of 165 scientific publications.

Pavel S. Lysov – undergraduate student of Radioelectronics and Automation Faculty, I. N. Ulyanov Chuvash State University. Research interests – digital processing of radio signals, wavelet transform, software-defined radio. The author of 4 scientific publications.

Contribution of authors:

Chumarov S. G. – conceptualization, methodology, validation, investigation, resources.

Semenov V. I. – conceptualization, methodology, validation, investigation, computer modelling, supervision.

Okhotkin G. P. – conceptualization, methodology, validation, investigation, review and editing.

Lysov P. S. – validation, investigation, computer modelling, editing.

Authors declare that they have no conflict of interest.

All authors read and approved the final manuscript.